

## ٢ متتابعات الدوال

متتابعات الدوال هي (كما يتضح من إسمها) متتابعات حدودها دوال، أي أنها متتابعات على الصورة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حيث  $f_n(x)$  هي دالة في المتغير  $x$  لكل قيمة ل  $n$ . ولأن لكل دالة من الدوال  $f_n(x)$  نطاق، وقد لا يكون لها كلها نفس النطاق فإننا نعرف نطاق المتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  على أنه النطاق المشترك لكل حدودها أي  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n$ .

**١-٢-٢ تعريف:** يقال أن متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب تقارباً بسيطاً (أو نقطياً) للدالة  $f(x)$  على المجموعة  $A$  إذا كان

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in A.$$

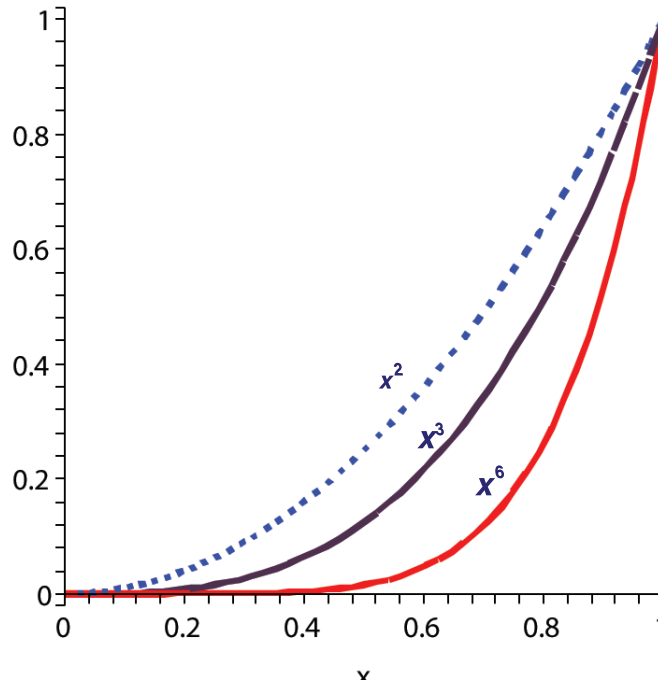
نلاحظ من هذا التعريف أننا لدراسة التقارب البسيط نقوم بتثبيت  $x$  ونأخذ النهاية عندما تؤول  $n$  للمالانهاية.

**٢-٢-٢ أمثلة:**

(١) لنكن  $f_n(x) = x^n$ . نلاحظ أن لأي  $x$  ثابتة يكون

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{إذا كان } |x| < 1, \\ 1, & \text{إذا كان } x = 1, \\ \text{غير موجودة,} & \text{إذا كان } x \text{ غير ذلك.} \end{cases}$$

فإذا كانت  $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$  فإن متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب تقارباً بسيطاً للدالة  $f$  على الفترة  $]-1, 1]$ .

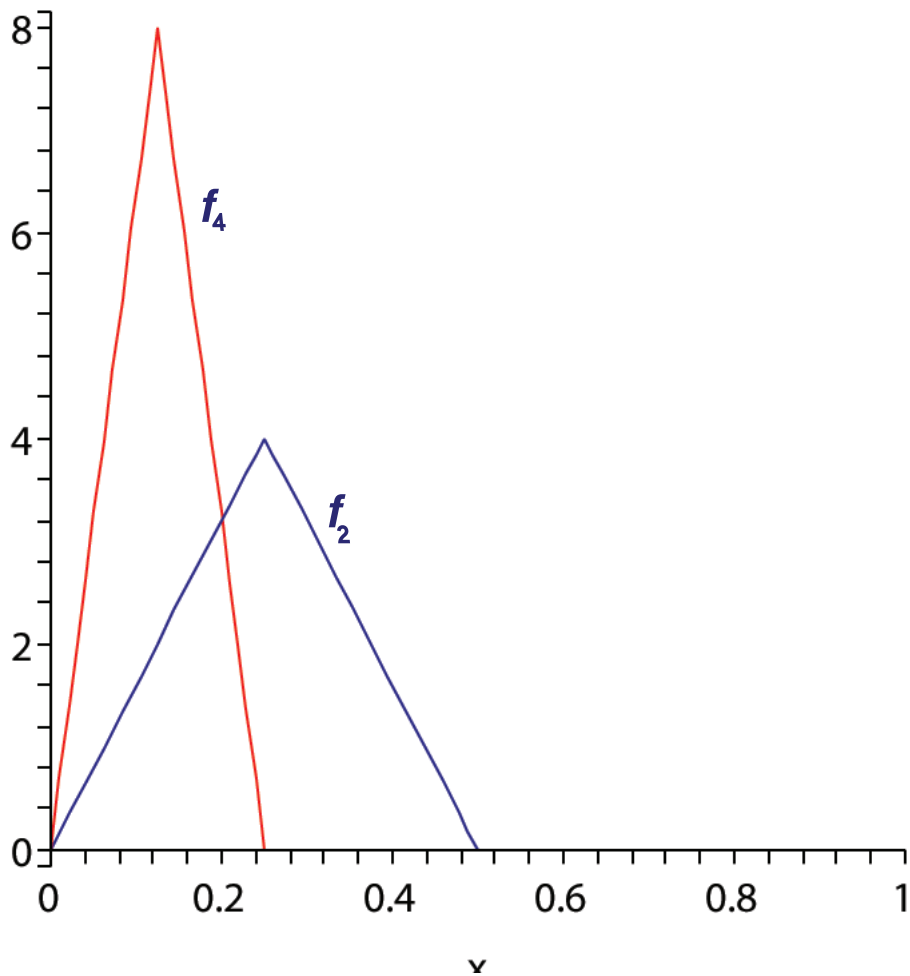


(٢) لتكن  $f_n(x) = 2^{-n}x$ ،  $f(x) \equiv 0$ . من الواضح أن متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تقتارب للدالة الصفرية على  $\mathbb{R}$ .

(٣) لتكن

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ 4n - 4n^2x, & \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{غير ذلك.} \end{cases}$$

نلاحظ أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$ ، لأن لأي  $x > 0$  يوجد  $n \in \mathbb{N}$  بحيث  $x > \frac{1}{n}$ .



لكن تكاملات متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  على الفترة  $[0, 1]$  يمكن حسابها بسهولة (أنظر الشكل) فنجد  $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \forall n$ ، بينما تكامل النهاية (الدالة الصفرية  $f(x) \equiv 0$ ) لا يساوي الواحد.

(٤) لتكن  $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ ،  $x \in [-1, 1]$  يمكن إثبات أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| = f(x)$  لكل  $x \in [-1, 1]$ . لندرس الآن مشتقات حدود المتتابعة، وكلها دوال قابلة للاشتقاق لأن القوة المرفوع لها  $|x|$  أكبر من الواحد ويكون لدينا  $f'_n(x) = \left(\frac{n+1}{n}\right) |x|^{\frac{1}{n}} \text{sgn}(x)$

لندرس سلوك متتابعة الدوال  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

نلاحظ أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0)$  موجودة رغم أن  $f'(0)$  غير معرفة.

(ه) نأخذ المتتابعة  $f_n(x) = (\sin n^2 x)/n$ ، من الواضح أنها تقتارب نقطيا للدالة الصفرية  $f(x) \equiv 0$  لكل  $x \in \mathbb{R}$ . لندرس المشتقات  $f'_n(x) = 2n \cos n^2 x$  فنجد أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  غير موجودة لأي  $x$ .

لدينا عدة ملاحظات على الأمثلة السابقة

### ٣-٢ - ملاحظات:

(أ) في المثال الأول نلاحظ أن حدود متابطة الدوال هي دوال متصلة، لكن النهاية ليست دالة متصلة.

(ب) في المثال الثالث نلاحظ أن حدود متابطة الدوال قابلة للتكامل، لكن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx.$$

(ج) في المثال الرابع نلاحظ أن حدود متابطة الدوال هي دوال قابلة للاشتقاق، لكن النهاية ليست دالة قابلة للاشتقاق.

(د) في المثال الخامس لدينا متابطة من الدوال القابلة للاشتقاق تقتارب لدالة قابلة للاشتقاق، لكن متابطة المشتقات ليست تقاربية.

من ذلك كله نجد أن التقارب النقطي لا يحافظ على الخواص والعمليات الأساسية على الدوال، لذا تظهر الحاجة لتمييز نوع أكثر قوة من التقارب وهو التقارب المنتظم الذي سندرسه في الفصل التالي.

٤.٢ أسئلة. اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

$$(١) \text{ التقارب البسيط للمتتابعة } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ إلى الدالة } f \text{ على } A \text{ يعني أن } \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = f(a) \forall a \in A \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \forall x \in A \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f_n(0) \forall n \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$$

$$(٢) \text{ إذا كانت } \forall x \in A : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \text{ فإن } \begin{pmatrix} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ معرفة على } \mathbb{R} \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ليست تقاربية} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تتباعد نقطيا على } \mathbb{R} \setminus A \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ تقارب نقطيا على } A \end{pmatrix}$$

(٣) إذا كانت كل حدود متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  قابلة للاشتقاق وكانت المتتابعة تقتارب نقطيا إلى الدالة  $f$  على  $[a, b]$  فإن

$$\begin{pmatrix} f \text{ غير قابلة للاشتقاق على } ]a, b[ \\ f \text{ دالة متصلة على } [a, b] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \text{ قابلة للاشتقاق على } ]a, b[ \\ f \text{ قد لا تحقق أي مما سبق} \end{pmatrix}$$

- (٤) إذا كانت متتابعة الدوال المحدودة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تقاربية نقطيا على  $A$  للدالة  $f$  فإن
- |                   |                     |
|-------------------|---------------------|
| $f$ دالة متصلة    | $f$ دالة غير محدودة |
| $f$ قابلة للتكامل | $f$ دالة محدودة     |

## ٥.٢ تمارين

(١) إدرس التقارب النقطي لكل من متتابعات الدوال الآتية:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(أ) <math>f_n(x) =  x ^{1/n}</math>,</p> <p>(ج) <math>f_n(x) = \ln \frac{x}{n}</math>,</p> <p>(هـ) <math>f_n(x) = \sin \frac{x}{n}</math>,</p> <p>(ز) <math>f_n(x) = \frac{1}{nx+1}</math>,</p> <p>(ط) <math>f_n(x) = \frac{x}{nx^2+1}</math>,</p> <p>(ك) <math>f_n(x) = \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}</math>,</p> <p>(م) <math>f_n(x) = x^{2^n}</math>,</p> | <p>(ب) <math>f_n(x) = e^{nx}</math>,</p> <p>(د) <math>f_n(x) = \ln((1 + \frac{1}{n})x)</math>,</p> <p>(و) <math>f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}</math>,</p> <p>(ح) <math>f_n(x) = \frac{x}{nx+1}</math>,</p> <p>(ي) <math>f_n(x) = \frac{1-nx^2}{(nx^2+1)^2}</math>,</p> <p>(ن) <math>f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n</math>,</p> <p>(ن) <math>f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} + x}</math>,</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

(٢) لتكن  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتابعة من الدوال تتقارب تقاربا نقطيا على  $A$  للدالة  $f$ ، وليكن

$$\exists M > 0 : |f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

برهن أن  $f$  دالة محدودة على  $A$ .

(٣) لتكن  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_k | k \in \mathbb{N}\}$ ، نعرف متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  بالعلاقة  $f_n(r_k) = 1$  عندما  $k = 0, 1, \dots, n$ ، ثم  $f_n(x) = 0$  غير ذلك، برهن أن  $f_n$  قابلة للتكامل بمفهوم ريمان على  $[0, 1]$ ، ثم برهن أن  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب نقطيا لدالة  $f$  غير قابلة للتكامل على  $[0, 1]$ .

## ٣ التقارب المنتظم

التقارب المنتظم لمتتابعة من الدوال يعني ألا يكون هناك تفاوتا كبيرا في سرعة التقارب عند قيم  $x$  المختلفة، لفهم ذلك سنعرف معدل بعد متتابعة  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  عن نهايتها  $a$  بأنها الدالة

$$n(\varepsilon) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid |a_m - a| < \varepsilon, \forall m > n\}.$$

١-٣ - أمثلة:

(١) سنوجد معدل بعد المتتابعة  $a_n = \frac{1}{n}$  عن الصفر. نلاحظ أن  $\frac{1}{n} - 0 < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ ، بالتالي نجد أن  $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ .

(٢) لتكن  $a \in ]0, 1[$ ، سنوجد معدل بعد المتتابعة  $a_n = a^n$  عن الصفر. نلاحظ أن

$$|a^n - 0| < \varepsilon \iff n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}.$$

بالتالي يكون  $n(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right] + 1$  من الواضح أن  $n(\varepsilon)$  تكبر بلا حدود عندما تقترب  $a$  من الواحد.

(٣) لندرس معدل بعد المتابعة  $a_n = a^{1/n}$  حيث  $a \in ]0, 1[$ . نأخذ  $0 < \varepsilon < 1$ :

$$1 - a^{1/n} < \varepsilon \iff a^{1/n} > 1 - \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \frac{\ln(1 - \varepsilon)}{\ln a}.$$

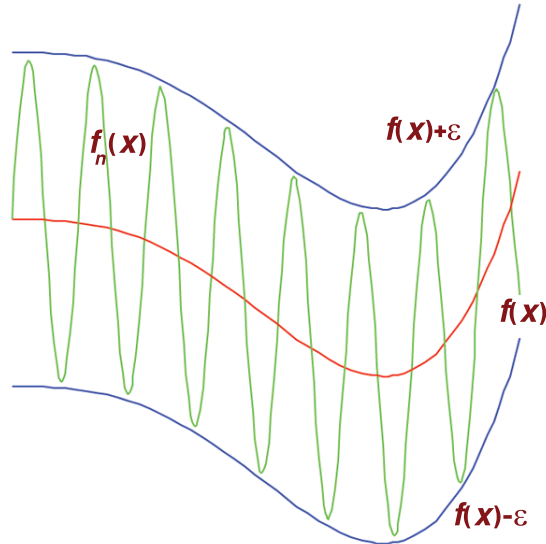
بالتالي  $n(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln a}{\ln(1 - \varepsilon)} \right\rceil + 1$  ونلاحظ أن هذا المقدار يؤول للمالانهاية عندما تقترب  $a$  من الصفر.

(٤) لئكن  $a \in \mathbb{R}$ . ندرس معدل بعد المتابعة  $a_n = (\sin n^2 x)/n$  عن الصفر، من الواضح أن  $|a_n| \leq 1/n$  وبالتالي  $n(\varepsilon) \leq [1/\varepsilon] + 1$  وهي لا تعتمد على قيمة  $a$ .

من الهام ان نرى أنه كلما زاد معدل بعد متتابعة عن نهايتها كلما كان التقارب بطيئاً، أي كلما احتجنا لحدود أكثر من المتتابعة كي نقترب من النهاية.  
لأي متتابعة دوال تقاربية يكون لدينا معدل للتقارب لكل  $x$ ، ويمكن أن نكتب بالتالي  $n(\varepsilon, x)$  للتعبير عن تلك المعدلات، والفكرة في التقارب المنتظم هي أن يكون هناك حد علوي لتلك المعدلات أي أن تكون جميع الدوال  $f_n(x)$  قريبة من دالة النهاية  $f(x)$  بالدرجة المطلوبة بعد قيمة معينة ل  $n$  لا تعتمد على  $x$ .

**٢-٣- تعريف التقارب المنتظم:** يقال أن متباينة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام للدالة  $f$  على المجموعة  $A$  إذا كان لأي  $\varepsilon > 0$  يوجد  $n_0 \in \mathbb{N}$  بحيث يكون لكل  $x \in A$ :  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \implies n > n_0$ . ويمكننا هذا أن نوجد حد علوي  $n_0$  لجميع المعدلات  $n(\varepsilon, x)$ . ونكتب  $f_n \Rightarrow f$  للتعبير عن التقارب المنتظم.

يمكن أيضاً فهم هذا التعريف من خلال الشكل التالي،



والذي يوضح أن التقارب المنتظم يعني أنه لأي  $0 < \varepsilon$  يوجد  $\mathbb{N} \ni n_0$  بحيث تكون منحنيات جميع الدوال  $f_n(x)$  واقعة بين منحنى  $f(x) + \varepsilon$  ومنحنى  $f(x) - \varepsilon$ .

سنعبر عن التقارب المنتظم باستخدام الصورة المختصرة التالية

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \forall n \in \mathbb{N} (n > n_0 \implies \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

أو

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

٣-٣- أمثلة:

(١) نعلم أن متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $f_n(x) = x^n$  تتقارب نقطيا لكل  $x \in [0, 1]$  إلى

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \text{ الدالة}$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0,1]} x^n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(٢) لنكن  $f_n(x) = (\sin n^2 x)/n$  ونهايتها النقطية هي الدالة الصفرية  $f(x) \equiv 0$ . لندرس التقارب المنتظم سنحسب

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\sin(n^2 x)| = \frac{1}{n},$$

وهو يؤول للصفر. أي أن هذه المتتابعة تتقارب بانتظام للدالة الصفرية.

(٣) لندرس متتابعة الدوال  $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$ . ولتكن  $f(x) \equiv 0$ .

عندما  $x = 0$  أو  $x = 1$  نكون  $f_n(x) = 0 = f(x)$ . ولأي  $x \in ]0, 1[$  نجد من العلاقة بين الدالة الأسية والدالة التربيعية أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x) \frac{n^2}{e^{-n \ln x}} = 0 \quad \text{لأن } -\ln x > 0.$$

أي أن المتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب نقطيا للدالة  $f$ . لدراسة التقارب المنتظم نلاحظ أن الدالة  $f_n(x)$  لها قيمة عظمى عند  $x_n = \frac{n}{n+1}$  وعند هذه النقطة

$$f_n(x_n) = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \frac{n^2}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n,$$

وهو مقدار يؤول للمالانهاية. أي أن تقارب المتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ليس منتظما.

يمكن أيضا التعبير عن التقارب المنتظم باستخدام شرط كوشي أي بدون معرفة النهاية  $f(x)$ .

**٤-٣- نظرية (شرط كوشي للتقارب المنتظم):** لتكن  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتابعة من الدوال معرفة على مجموعة  $A \subseteq \mathbb{R}$ . المتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تقارب بانتظام لدالة  $f$  إذا وفقط إذا تحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n, m \in \mathbb{N} (n, m > n_0 \implies \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

**برهان - ( $\Leftarrow$ )** نفرض أن المتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تقارب بانتظام للدالة  $f(x)$ . ونأخذ  $\varepsilon > 0$  من تعريف التقارب المنتظم نعلم أنه يوجد  $n_0 \in \mathbb{N}$  بحيث لكل  $n > n_0$  يكون  $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ . بالتالي يكون لأي  $n, m > n_0$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| &= \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ &\leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in A} |f(x) - f_m(x)| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

**( $\Rightarrow$ )** نفرض نحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم ونريد إثبات أن المتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تقارب بانتظام. لإثبات ذلك نحتاج أولاً لإيجاد دالة  $f(x)$  كنهاية للمتتابعة  $f_n(x)$ . فنثبت  $x \in A$  ونلاحظ أن المتتابعة  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  متتابعة كوشية من الأعداد الحقيقية. بالتالي فإن لها نهاية حقيقية. تلك النهاية نعتمد على قيمة  $x$  التي لبتناها لذا نسميها  $f(x)$ . سنبرهن الآن أن متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تقارب بانتظام للدالة  $f(x)$  المعرفة كما سبق. ليكن  $\varepsilon > 0$  معطى ونوجد  $n_0 \in \mathbb{N}$  نحقق شرط كوشي :

$$n, m > n_0 \implies \sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

لكل  $x$  نختار  $m_x$  كبيرة بما فيه الكفاية بحيث نحقق

$$|f(x) - f_{m_x}(x)| < \varepsilon \quad (1) \quad (\text{لاحظ أن هذا ممكن لأن } \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x))$$

$$m_x > n_0 \quad (2)$$

نجد أنه لكل  $n > n_0$  ولكل  $x \in A$  لدينا

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m_x}(x)| + |f_{m_x}(x) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

وبالتالي يتحقق تعريف التقارب المنتظم لأن  $n_0$  لا نعتمد على  $x$ .

**النظرية التالية تلخص الخواص الجبرية للتقارب المنتظم**

٣-٥- نظرية: لتكن  $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g$  على  $A$  فإن:

$$(١) f_n + g_n \Rightarrow f + g \text{ على } A.$$

$$(٢) \text{ إذا كانت } f, g \text{ دالتان محدودتان فإن } f \cdot g \Rightarrow f_n \cdot g_n \text{ على } A.$$

$$(٣) \text{ إذا كانت } f \text{ دالة محدودة وكانت } 0 < \alpha < |g(x)| \text{ على } A \text{ حيث } \alpha \text{ ثابت،}$$

$$\text{فإن } \frac{f_n}{g_n} \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ على } A.$$

$$(٤) \max(f_n, g_n) \Rightarrow \max(f, g) \text{ على } A.$$

$$(٥) |f_n| \Rightarrow |f| \text{ على } A.$$

**برهان -** سنبرهن (١)، (٢) و (٤) ونترك (٣) و (٥) كتمارين للقارئ.

**برهان (١):** ليكن  $\varepsilon > 0$  معطى، من تعريف التقارب المنتظم يوجد  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  بحيث

$$n > n_1 \Rightarrow < \varepsilon/2, \quad n > n_2 \Rightarrow \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/2.$$

نأخذ  $n_0 = \max(n_1, n_2)$  فنجد

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Rightarrow \sup_{x \in A} |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq \\ &\leq \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| \quad (\text{من متباينة المثلث}) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad (لأن \quad n_0 \geq n_1, n_0 \geq n_2). \end{aligned}$$

**برهان (٢):** نفرض أن  $f, g$  دالتان محدودتان، وليكن

$$M_1, M_2 > 0 : \sup_{x \in A} |f(x)| < M_1, \quad \sup_{x \in A} |g(x)| < M_2.$$

يمكن أن نفرض (لماذا؟) أن لكل  $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x)| < M_1, \quad \sup_{x \in A} |g_n(x)| < M_2.$$

ليكن  $\varepsilon > 0$  معطى، من فرض تقارب  $f_n \Rightarrow f, g_n \Rightarrow g$  على  $A$  نعلم أنه يوجد  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  بحيث

$$n > n_1 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/M_2, \quad n > n_2 \Rightarrow \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/M_1$$

نختار  $n_0 = \max(n_1, n_2)$  فنجد أنه لأي  $n > n_0$ :

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in A} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&= \sup_{x \in A} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq \sup_{x \in A} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + \sup_{x \in A} |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&= \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \cdot \sup_{x \in A} |g_n(x)| \\
&\quad + \sup_{x \in A} |g_n(x) - g(x)| \cdot \sup_{x \in A} |f(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{M_2} \cdot M_2 + \frac{\varepsilon}{M_1} \cdot M_1 = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

**برهان (٤):** لتكن  $h(x) = \max(f(x), g(x))$ ،  $h_n(x) = \max(f_n(x), g_n(x))$  ليكن  $\varepsilon > 0$  معطى ولنختار  $n_0$  كما سبق في (١)، (٢). سنثبت أن

$$n > n_0 \implies \sup_{x \in A} |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon.$$

سنقسم  $A$  إلى جزئين:  $A_1 = \{x \in A | f(x) \geq g(x)\}$ ،  $A_2 = A \setminus A_1$ . لأي  $x \in A_1$  نكون  $h(x) = f(x)$  ويكون لدينا احتمالان لـ  $h_n(x)$ : إما  $h_n(x) = f_n(x)$  وفي هذه الحالة يكون

$$|h_n(x) - h(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

أو  $h_n(x) = g_n(x) > f_n(x)$  وفي هذه الحالة يكون

$$f(x) - \varepsilon/2 < f_n(x) < h_n(x) = g_n(x) < g(x) + \varepsilon/2 \leq f(x) + \varepsilon/2$$

فينتج أيضا أن  $|h_n(x) - h(x)| = |g_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$ . وبذلك نكون قد أثبتنا أن

$$\sup_{x \in A_1} |h_n(x) - h(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

يمكن بالمثل إثبات متباينة مشابهة عندما  $x \in A_2$ .

**٦-٣ - أمثلة:** سنبين في المثالين الآتيين أن شروط المحدودية والبعد عن الصفر في (٢) و (٣) ضرورية.

(١) لتكن  $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ ،  $f(x) = g(x) = x$ ،  $A = \mathbb{R}$ . من الواضح أن

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}$$

وبالتالي يتضح أن  $f_n \rightrightarrows f$ .

من ناحية أخرى لدراسة التقارب المنتظم للمتتابعة  $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  نحسب

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^2 - \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} - x^2 \right| \\ = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{2}{n}x - \frac{1}{n^2} \right| = +\infty. \end{aligned}$$

وهو ما يوضح أن  $f_n g_n \not\rightarrow f g$  ويرجع ذلك لعدم محدودية الدالة  $f(x) = x$  على  $\mathbb{R}$ .

(٥) لنكن  $f_n(x) = f(x) = 1$ ,  $g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ ,  $g(x) = x$ ,  $x \in ]0, 1[$  مرة أخرى من السهل إثبات أن  $g_n \rightarrow g$ , أما العلاقة بين  $1/g_n$  و  $1/g$  فنراها بالحساب

$$\sup_{x \in ]0, 1[} \left| \frac{1}{g_n(x)} - \frac{1}{g(x)} \right| = \sup_{x \in ]0, 1[} \left| \frac{1}{x + \frac{1}{n}} - \frac{1}{x} \right| = \sup_{x \in ]0, 1[} \left| \frac{1}{x(nx + 1)} \right| = +\infty.$$

يثبت إذن أن  $\frac{1}{g_n} \not\rightarrow \frac{1}{g}$  بسبب أن  $g(x)$  ليست بعيدة عن الصفر.

**٧.٣ أسئلة.** اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي

- (١) التقارب المنتظم للمتتابعة  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  إلى الدالة  $f$  على  $A$  يعني أن
 

|                                                                               |     |                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A}  f_n(x)  = \sup_{x \in A}  f(x) $ | ( ) | $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}}  f_n(x) - f(x)  = 0$ | ( ) |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A}  f_n(x) - f(x)  = 0$              | ( ) | $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A}  f_n(x) - f(x)  = 0$          | ( ) |
- (٢) إذا كانت متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام إلى الدالة  $f$  على  $A$  فإن
 

|                                                             |     |                                                      |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|------------------------------------------------------|-----|
| $f_n(x) = f(x), \forall x \in A$                            | ( ) | $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة على $A$            | ( ) |
| $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب نقطياً للدالة $f$ على $A$ | ( ) | $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام على $A$ | ( ) |
- (٣) إذا كانت كل حدود متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  دوال محدودة وكانت المتتابعة تتقارب بانتظام إلى الدالة  $f$  على  $A$  فإن
 

|                             |     |                                   |     |
|-----------------------------|-----|-----------------------------------|-----|
| $f$ دالة غير محدودة على $A$ | ( ) | $f$ دالة محدودة على $A$           | ( ) |
| $f$ قد لا تحقق أي مما سبق   | ( ) | $f_n - f$ دوال غير محدودة على $A$ | ( ) |
- (٤) إذا كانت متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  محدودة و تقاربية نقطياً على  $A$  للدالة  $f$  فإن
 

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام إلى $f$ على $A$           | ( ) |
| $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام                        | ( ) |
| $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب نقطياً للدالة الصفرية على $A$ | ( ) |
- (٥) شرط كوشي للتقارب المنتظم لمتتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  على  $A$ 

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A}  f_n(x) - f_{n+1}(x)  = 0$ | ( ) |
| $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A}  f_n(x) - f_{n+1}(x)  = 0$ | ( ) |
| $(f_n - f_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة على $A$                    | ( ) |
| $(f_n - f_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة على $A$                    | ( ) |
- (٦) إذا كانت متتابعتي الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقاربان بانتظام إلى  $f, g$  على  $A$ ، وكانت المتتابعة  $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  محدودة فإن
 

|                                                          |     |                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------|-----|------------------------------------------------------------------|-----|
| $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ محدودة على $A$                | ( ) | $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب بانتظام على $A$            | ( ) |
| $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ لا تتقارب بانتظام على $A$ | ( ) | $(f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تتقارب نقطياً للدالة $fg$ على $A$ | ( ) |

### ٨.٣ تمارين

(١) برهن أنه إذا كانت  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام على  $A$  وكانت  $B \subset A$  فإن  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام على  $B$ .

(٢) برهن أنه إذا كانت متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام على كل من  $A, B$  فإنها تتقارب بانتظام على  $A \cup B$ .

(٣) برهن أنه إذا كانت متتابعة الدوال  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام على  $B$  ولا تتقارب بانتظام على  $A \setminus B$  فإنها لا يمكن أن تتقارب بانتظام على  $A$ .

(٤) برهن أنه إذا كانت  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تتقارب بانتظام لدالة محدودة  $f$  على  $A$  فإن

$$\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sup_{n > n_0} \sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq M.$$

(٥) لتكن  $f_n \Rightarrow f$  على  $A$ ، وليكن  $M > 0$  بحيث  $\sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq M$  لكل  $n \in \mathbb{N}$ . برهن أنه إذا كانت  $g$  دالة متصلة اتصالاً منتظماً على  $A$  وكانت  $h_n(x) = g(f_n(x))$ ،  $h(x) = g(f(x))$  فإن  $h_n \Rightarrow h$  على  $A$ .

(٦) إدرس التقارب المنتظم لكل من متتابعات الدوال في تمرين (١).٥.٢.١

(٧) إدرس التقارب المنتظم لكل من متتابعات الدوال الآتية

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad (ا) \quad f_n(x) = n(n+1)x^n \quad (د)$$

$$f_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \quad (هـ)$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n! x^n} \quad (ب) \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx \quad (و)$$

$$f_n(x) = x^n + \frac{1}{2^n x^n} \quad (ج) \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos(2k+1)x \quad (ز)$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{حيث } f_n(x) = \overbrace{(f \circ f \cdots \circ f)}^{n \text{ مرة}} \quad (ح)$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], f(x) = x^2 - 2 \quad \text{حيث } f_n(x) = \overbrace{(f \circ f \cdots \circ f)}^{n \text{ مرة}} \quad (ط)$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) & x \in [1/(n+1), 1/n] \\ 0, & \text{غير ذلك} \end{cases} \quad (ي)$$

(٨) لتكن  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتابعة من الدوال تتقارب نقطياً إلى الدالة المتصلة  $f$  على الفترة المغلقة  $[a, b]$ ، برهن أنه إذا كانت كل  $f_n$  دالة تزايدية على  $[a, b]$  فإن  $f_n \Rightarrow f$  على  $[a, b]$ .